

**优选例题**

例1．已知函数有两个零点，．

（1）求*a*的取值范围；

（2）求证：．

【答案】（1）；（2）证明见解析．

【解析】（1）有两个零点有两个相异实根．

令，则，

由，得；由，得，

在单调递增，在单调递减，

，

又，当时，；当时，，

当时，，

有两个零点时，实数*a*的取值范围为．

（2）不妨设，由题意得，

，，，

要证：，只需证．

，

令，，只需证，

，，只需证：．

令，，

在递增，，

成立．

综上所述，成立．

例2．已知函数．

（1）讨论的单调性；

（2）若，是方程的两个不同实根，证明：．

【答案】（1）见解析；（2）证明见解析．

【解析】（1）解：因为，所以．

①当时，在上恒成立，故在上单调递减；

②当时，由，得；由，得，

即在上单调递增，在上单调递减，

综上，当时，在上单调递减；

当时，在上单调递增，在上单调递减．

（2）证明：因为，所以，，

即．

设，则，

故在上单调递减，在上单调递增．

由题意不妨设，欲证，只需证，

又，，在上单调递增．

故只需证．

因为，所以只需证对任意的恒成立即可，

即，

整理得，

即．

设，，

则．

因为，所以，所以，

所以在上单调递减，

则，所以成立．

**模拟优练**

1．已知函数，．其中，为常数．

（1）若函数在定义域内有且只有一个极值点，求实数的取值范围；

（2）已知，是函数的两个不同的零点，求证：．

2．已知函数，．

（1）若在内单调递减，求实数的取值范围；

（2）若函数有两个极值点分别为，，证明：．

3．已知函数．

（1）求函数的极值；

（2）若直线与函数的图象有两个不同交点，，求证：．

4．设函数．

（1）讨论函数的单调性；

（2）当时，设，是的两个零点，证明：．

**参考答案**

1．【答案】（1）；（2）证明见解析．

【解析】（1），

因为函数在定义域有且仅有一个极值点，

所以在内有且仅有一个变号零点，

由二次函数的图象和性质知，解得，

即实数的取值范围为．

（2），

当时，，在上单调递增，函数至多有一个零点，不符合题意；

当时，令，得．

当时，，单调递减；

当时，，单调递增，

故当时，函数取得最小值，

当时，，，函数无零点，不合题意；

当时，，，函数仅有一个零点，不合题意；

当时，，，

又，所以在上只有一个零点，

令，则，

故当时，，单调递增；

当时，，单调递减，

所以，即，所以，

所以，

又，所以在上只有一个零点，所以满足题意；

不妨设，则，，

令，

则，

，

当时，，所以在上单调递减，

所以当时，，即，

因为，所以，

所以，

又，，且在上单调递增，

所以，故得证．

2．【答案】（1）；（2）证明见解析．

【解析】（I）由题可知，，

在内单调递减，

∴在内恒成立，

即在内恒成立，

令，则，

∴当时，，即在内为增函数；

当时，，即在内为减函数，

∴，即，，

∴．

（2）若函数有两个极值点分别为，，

则在内有两根，，

，两式相减，得，

不妨设，

当时，恒成立；

当时，要证明，只需证明，

即证明，即证明，

令，，令，，

在上单调递减，

，，

即成立，．

3．【答案】（1）极小值为，无极大值；（2）证明见解析．

【解析】（1）∵，∴，

变化时，与变化情况如下

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  | － | 0 | + |
|  | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 |

∴当时，有极小值为，

∴极小值为，无极大值．

（2）由时，，

设，由（1）知，，，

欲证：，需证：，

由，，且在是单调递减函数，

即证：，

∵，即证：，

令，，，

当时，，∴单调递增，∴，

∴时，，

由时，∴，∴，得证．

4．【答案】（1）见解析；（2）证明见解析．

【解析】（1）因为，所以，

所以当时，，函数在上单调递增；

当时，若，则，单调递减；

若，则，单调递增，

综上，当时，函数在上单调递增；

当时，函数在上单调递减，在上单调递增．

（2）证明：由（1）知，当时，函数在上单调递减，在上单调递增，

且，是的两个零点，，

不妨设，

令，

则，

所以函数在上单调递增，

又，所以，

所以，即，

所以，

又，，函数在上单调递增，

所以，即．