**专题16 导数中的隐零点问题**



利用导数解决函数问题常与函数单调性的判断有关，而函数的单调性与其导函数的零点有着紧密的联系。按导函数零点是否可求精确解可以分为两类：一类是数值上能精确求解的，称之为“显零点”；另一类是能够判断其存在但无法直接表示的，称之为“隐零点”。

**　函数最值中的“隐零点”**

【例1】已知函数f（x）=+4log2x+m，x∈[，4]，m为常数．

（1）设函数f（x）存在大于1的零点，求实数m的取值范围；

（2）设函数f（x）有两个互异的零点α，β，求m的取值范围，并求α·β的值．

【答案】(1)[–12，0);（2）.

【解析】（1）令log2x=t，x∈[，4]，则g（t）=t2+4t+m（t∈[–3，2]）．

由于函数f（x）存在大于1的零点，所以方程t2+4t+m=0在t∈（0，2]上存在实数根，

由t2+4t+m=0，得m=–t2–4t，t∈（0，2]，

所以m∈[–12，0）．

故m的取值范围为[–12，0）．

（2）函数f（x）有两个互异的零点α，β，则函数g（t）=t2+4t+m在[–3，2]上有两个互异的零点t1，t2，其中t1=log2α，t2=log2β，

所以，解得3≤m<4，所以m的取值范围为[3，4）．

根据根与系数的关系，可知t1+t2=–4，即log2α+log2β=–4，

所以log2（α·β）=–4，α·β=2–4=．

【例2】设函数*f*（*x*）＝*ax*2+*bx*+*clnx*，（其中*a*，*b*，*c*为实常数）曲线*y*＝*f*（*x*）（其中*a*＞0）在点（1，*f*（1））处的切线方程为*y*＝3*x*﹣3，

（Ⅰ）若函数*f*（*x*）无极值点且*f*′（*x*）存在零点，求*a*，*b*，*c*的值；

（Ⅱ）若函数*f*（*x*）有两个极值点，证明*f*（*x*）的极小值小于．

【答案】（Ⅰ）*a*，*b*，*c**；*（Ⅱ）见解析.

【解析】解（Ⅰ）曲线*y*＝*f*（*x*）（其中*a*＞0）在点（1，*f*（1））处的切线方程为*y*＝3*x*﹣3，*f*′（*x*）＝2*ax*+*b*，

斜率*k*═*f*′（1）＝2*a*+*b*+*c*＝3，

由点（1，*f*（1））在*y*＝3*x*﹣3上，

∴*f*（1）＝3﹣3＝0，

∴*f*（1）＝*a*+*b*+*cln*1＝*a*+*b*＝0，

即*b*＝﹣*a*，*c*＝3﹣*a*，

则*f*（*x*）＝*ax*2﹣*ax*+（3﹣*a*）*lnx*，

*f*′（*x*）

当*F*（*x*）无极值点且*f*′（*x*）存在零点时，则方程*f*′（*x*）0，

即关于的方程2*ax*2﹣*ax*+3﹣*a*＝0

有两个相等的实数根，（*a*＞0），∴△＝*a*2﹣8*a*（3﹣*a*）＝0，解得*a*，*b*＝﹣*a*，*c*＝3﹣*a*，即*a*，*b*，*c*，

（Ⅱ）由*f*′（*x*）（*x*＞0）

要使函数*f*（*x*）有两个极值点，只要方程

2*ax*2﹣*ax*+3﹣*a*＝0有两个不相等的实数根，两正根为*x*1，*x*2，*x*1＜*x*2，∴△＝*a*2﹣8*a*（3﹣*a*）＞0，（*a*＞0），

解得：*a*，∴*x*10，*x*2，∴*a*＜3，

∴0，*x*2，

∴当*x*＜*x*2时，*f*′（*x*）＜0时，

当*x*2＜*x*时，*f*′（*x*）＞0时，

∴当*x*＝*x*2时，有极小值*f*（*x*2），

由*ax*2+3＝0，得：*a*，

∴*f*（*x*2）＝*ax*22﹣*ax*2+（3﹣*a*）*lnx*2＝*a*（*ax*2﹣*lnx*2）+3*lnx*2

＝3*lnx*2，*x*2，

而*f*′（*x*），

即*g*（*x*）＝*x*2﹣*x*﹣*lnx*，（*x*≤1），有*g*′（*x*）＝2*x*﹣1

对于*x*∈（，1]恒成立，

又*g*（1）＝0，故对*x*∈（，），恒有*g*（*x*）＞*g*（1），

即*g*（*x*）＞0，∴*f*′（*x*）＞0，对于*x*2，恒成立．

即*f*（*x*2）在（，）上单调递增

∴*f*（*x*2）

【例3】已知函数*f*（*x*）＝*lnx*+*a*（*x*2﹣1）．

（1）讨论函数*f*（*x*）的单调性；

（2）当*a*，*x*∈[1，+∞）时，证明：*f*（*x*）≤（*x*﹣1）*ex*．

【答案】（1）函数*f*（*x*）在区间上单调递增，在区间上单调递减（2）见解析

【解析】（1）函数的定义域为（0，+∞），，

当*a*≥0时，*f*′（*x*）＞0在（0，+∞）上恒成立，所以函数*f*（*x*）在（0，+∞）上单调递增，

当*a*＜0时，由*f*′（*x*）＞0解得，由*f*′（*x*）＜0解得，

∴函数*f*（*x*）在区间上单调递增，在区间上单调递减；

（2）证明：令，则，*g*′（1）＝*e*﹣（*e*﹣1）﹣1＝0，

再令，则，

当*x*≥1时，，

∴，即*m*′（*x*）＞0，

∴*y*＝*m*（*x*）在[1，+∞）上单调递增，

∵*m*（1）＝*g*′（1）＝0，

∴*m*（*x*）≥*m*（1）＝0，

∴*y*＝*g*（*x*）在[1，+∞）上单调递增，

∴*g*（*x*）≥*g*（1）＝0，

综上可知，*f*（*x*）≤（*x*﹣1）*ex*．

**　不等式证明中的“隐零点”**

【例4】已知函数f(x)=lnx - ax(a∈R)

(l)讨论函数f(x)的单调性和极值

(2)若函数）y=f(x)有两个零点x1，x2，证明．

【答案】（1）答案见解析；（2）证明见解析．

【解析】（1）由，得，

若时，恒成立，在上单调递增，无极值

若时，由，有，在上单调递增，在上单调递减，

函数的极大值为．

（2）不妨设，由，

得，

即，

所以

设，则，

设，则

即函数在上递减，

所以，从而，

即．

【例5】已知函数.

（1）若对任意*x*0，*f*（*x*）0恒成立，求实数*a*的取值范围；

（2）若函数*f*（*x*）有两个不同的零点*x*1，*x*2（*x*1*x*2），证明：.

【答案】（1）；（2）证明见解析.

【解析】（1）由，得.

令.

当时，；当时，；

在上单调递增，在上单调递减，

.

对任意恒成立，.

（2）证明：由（1）可知，在上单调递增，在上单调递减，

.

若，则，

令



在上单调递增，，

.

又，在上单调递减，

.

若，则显然成立.

综上，.

又

以上两式左右两端分别相加，得

，即，

所以.

【例6】对于函数f（x），若存在x0∈R，使f（x0）=x0成立，则称x0为f（x）的一个不动点．设函数f（x）=ax2+bx+1（a＞0）．

（Ⅰ）当a=2，b=﹣2时，求f（x）的不动点；

（Ⅱ）若f（x）有两个相异的不动点x1，x2，

（ⅰ）当x1＜1＜x2时，设f（x）的对称轴为直线x=m，求证：m＞；

（ⅱ）若|x1|＜2且|x1﹣x2|=2，求实数b的取值范围．

【答案】（I）不动点为；（II）（i）详见解析，（ii）。

（Ⅰ）依题意：f（x）=2x2﹣2x+1=x，即2x2﹣3x+1=0，

解得或1，即f（x）的不动点为和1；

（Ⅱ）（ⅰ） 由f （x）表达式得m=﹣，

∵g（x）=f （x）﹣x=a x2+（b﹣1）x+1，a＞0，

由x1，x2是方程f （x）=x的两相异根，且x1＜1＜x2，

∴g（1）＜0⇒a+b＜0⇒﹣＞1⇒﹣＞，即 m＞．

（ⅱ）△=（b﹣1）2﹣4a＞0⇒（b﹣1）2＞4a，

x1+x2=，x1x2=，

∴|x1﹣x2|2=（x1+x2）2﹣4x1x2=（）2﹣=22，

∴（b﹣1）2=4a+4a2（\*）

又|x1﹣x2|=2，

∴x1、x2 到 g（x） 对称轴 x=的距离都为1，

要使g（x）=0 有一根属于 （﹣2，2），

则 g（x） 对称轴 x=∈（﹣3，3），

∴﹣3＜＜3⇒a＞|b﹣1|，

把代入 （\*） 得：（b﹣1）2＞|b﹣1|+（b﹣1）2，

解得：b＜或 b＞，

∴b 的取值范围是：（﹣∞，）∪（ ，+∞）．



1．已知函数*f*（*x*）＝*x*3*ax*2﹣*x*+1（*a*∈*R*）．

（1）当*a*＝2时，求曲线*y*＝*f*（*x*）在点（1，*f* （1））处的切线方程；

（2）当*a*＜0时，设*g*（*x*）＝*f*（*x*）+*x*．

①求函数*g*（*x*）的极值；

②若函数*g*（*x*）在[1，2]上的最小值是﹣9，求实数*a*的值．

【答案】（1）8*x*﹣*y*﹣4＝0；（2）①极大值是1，极小值为，②﹣3

【解析】解：（1）当*a*＝2时，*f*（*x*）＝*x*3+3*x*2﹣*x*+1，＝3*x*2+6*x*﹣1，

∴*k*＝＝8，*f*（1）＝4，故切线方程为*y*﹣4＝8（*x*﹣1），即：8*x*﹣*y*﹣4＝0．

（2）①*g*（*x*）＝*f*（*x*）+*x*＝*x*3，*a*＜0，

∴令*g*′（*x*）＝3*x*2+3*ax*＝3*x*（*x*+*a*）＝0得*x*1＝0，*x*2＝﹣*a*＞*x*1．

随着*x*的变化，*g*（*x*）和*g*′（*x*）的变化如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | （﹣∞，0） | 0 | （0，﹣*a*） | ﹣*a* | （﹣*a*，+∞） |
| *g*′（*x*） | + | 0 | ﹣ | 0 | + |
| *g*（*x*） | ↑ | 极大值 | ↓ | 极小值 | ↑ |

所以*g*（*x*）的极大值是*g*（0）＝1；极小值为*g*（﹣*a*）．

②*g*′（*x*）＝3*x*2+3*ax*＝3*x*（*x*+*a*），

（1）当﹣1≤*a*＜0时，*g*′（*x*）≥0，*g*（*x*）在[1，2]内递增，

*g*（*x*）*min*＝*g*（1）（舍去）．

（2）当﹣2＜*a*＜﹣1时，则*x*，*g*′（*x*），*g*（*x*）关系如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | （1，﹣*a*） | ﹣*a* | （﹣*a*，2） |
| *g*′（*x*） | ﹣ | 0 | ＝ |
| *g*（*x*） | ↓ | 极小值 | ↑ |

*g*（*x*）*min*＝*g*（﹣*a*）（舍）．

（3）当*a*≤﹣2时，*g*（*x*）在[1，2]内单调递减，

*g*（*x*）*min*＝*g*（2）＝6*a*+9＝﹣9，*a*＝﹣3．

综上可知，*a*＝﹣3．

2．设*f*(*x*)＝(ln *x*)ln(1－*x*).

(1)求函数*y*＝*f*(*x*)的图象在处的切线方程；

(2)求函数*y*＝*f*′(*x*)的零点.

【答案】（1）*y*＝ln22. (2) *x*＝

【解析】(1)由于*f*′(*x*)＝－ (0<*x*<1)，

故*f*′＝0，*f*＝ln22，

那么在*x*＝处的切线方程为：*y*＝ln22.

(2)由(1)知*f*′(*x*)＝ [(*x*－1)ln(1－*x*)＋*x*ln *x*](0<*x*<1)，

令*g*(*x*)＝(*x*－1)ln(1－*x*)＋*x*ln *x*，

则*g*′(*x*)＝2＋ln *x*＋ln(1－*x*)，

令*h*(*x*)＝2＋ln *x*＋ln(1－*x*)，则*h*′(*x*)＝，

当*x*∈时，*h*′(*x*)>0，*h*(*x*)为递增函数；

当*x*∈时，*h*′(*x*)<0，*h*(*x*)为递减函数；

所以*h*(*x*)max＝*h*＝2－2ln 2>0.

又当*x*→0时，*h*(*x*)→－∞；当*x*→1时，*h*(*x*)→－∞，则∃0<*x*1<<*x*2<1，使得*h*(*x*1)＝*h*(*x*2)＝0.

则*g*(*x*)的增区间是(*x*1，*x*2)，减区间是(0，*x*1)，(*x*2，1).

又*g*＝0，当*x*→0时，*g*(*x*)→0；当*x*→1时，*g*(*x*)→0；

所以*x*＝是*g*(*x*)＝0的唯一实数根.

那么*x*＝是函数*y*＝*f*′(*x*)的唯一零点.

3．已知函数*f*(*x*)*=*e*x-ax*(*a*为常数)的图象与*y*轴交于点*A*,曲线*y=f*(*x*)在点*A*处的切线斜率为*-*1*.*

(1)求*a*的值及函数*f*(*x*)的极值;

(2)证明:当*x>*0时,*x*2*<*e*x.*

【答案】（1）*a=*2，极小值为*f*(ln 2)*=*2*-*2ln 2*=*2*-*ln 4,*f*(*x*)无极大值；（2）见解析.

【解析】(1)解 由*f*(*x*)*=*e*x-ax*,得*f'*(*x*)*=*e*x-a.*

因为*f'*(0)*=*1*-a=-*1,所以*a=*2*.*

所以*f*(*x*)*=*e*x-*2*x*,*f'*(*x*)*=*e*x-*2*.*

令*f'*(*x*)*=*0,得*x=*ln 2*.*

当*x<*ln 2时,*f'*(*x*)*<*0,*f*(*x*)单调递减;当*x>*ln 2时,*f'*(*x*)*>*0,*f*(*x*)单调递增,

所以当*x=*ln 2时,*f*(*x*)取得极小值,极小值为*f*(ln 2)*=*2*-*2ln 2*=*2*-*ln 4,*f*(*x*)无极大值*.*

(2)证明 令*g*(*x*)*=*e*x-x*2,则*g'*(*x*)*=*e*x-*2*x.*由(1),得*g'*(*x*)*=f*(*x*)≥*f*(ln 2)*=*2*-*ln 4*>*0,

故*g*(*x*)在R上单调递增*.*

因为*g*(0)*=*1*>*0,所以当*x>*0,*g*(*x*)*>g*(0)*>*0,即*x*2*<*e*x.*

4．已知函数．

（1）当*a*＝3时，求函数*y*＝*f*（*x*）的图象在*x*＝0处的切线方程；

（2）当*x*≥0时，*f*（*x*）≥0恒成立，求实数*a*的取值范围．

【答案】（1）*y*＝5*x*；（2）*a*≥﹣2．

【解析】（1）函数的定义域为，

当时，3*x*﹣1，

则，

，又，

∴切点为斜率的切线方程为：；

（2）令，若时，

则，，

∴*x*≥0时，*f*（*x*）≥0恒成立，等价于*t*≥1时，，

令*g*（*t*）＝*a*ln*t*3*t*﹣4，*g*（1）＝0，*g*′（*t*）3，

设*h*（*t*）＝3*t*2+*at*﹣1，则*h*（*t*）恒过（0，﹣1）点，

①当*h*（1）≥0，即时，*h*（*t*）≥0在*t*≥1恒成立，

∴*g*（*t*）在*t*≥1时单调递增，∴*g*（*t*）≥*g*（1）＝0恒成立，

②设抛物线*h*（*t*）＝3*t*2+*at*﹣1与*x*轴的两个交点分别为*t*1，*t*2，且*t*1＜*t*2，

当*h*（1）＜0时，即*a*＜﹣2时，*h*（*t*）＜0，在*t*∈（1，*t*2）恒成立，

∴*g*′（*t*）＜0在*t*∈（1，*t*2）恒成立，*g*（*x*）在（1，*t*2）时单调递减，

∴*g*（*t*）＜*g*（1）＝0在*t*∈（1，*t*2）恒成立，

不满足*g*（*t*）＞0恒成立，

综上所述*a*≥﹣2．

5．已知函数*f*（*x*）＝*lnx*，*a*∈*R*．

（1）若*x*＝2是函数*f*（*x*）的极值点，求曲线*y*＝*f*（*x*）在点（1，*f*（1））处的切线方程；

（2）若*x*＞1时，*f*（*x*）＞0，求*a*的取值范围．

【答案】(1) *x*+8*y*﹣1＝0，(2) （﹣∞，2]．

【解析】（1）∵*f*′（*x*），

由*x*＝2是函数*f*（*x*）的极值点，可得，*f*′（2）＝0，

∴*a*，

∴*y*＝*f*（*x*）在点（1，*f*（1））处的切线斜率*k*＝*f*′（1），

又*f*（1）＝0

故*y*＝*f*（*x*）在点（1，*f*（1））处的切线方程*y*即*x*+8*y*﹣1＝0，

（2）若*a*≤2，*x*＞1时，*f*′（*x*）0，

∴*f*（*x*）在（1，+∞）上单调递增，*f*（*x*）＞*f*（1）＝0，符合题意，

若*a*＞2，方程*x*2+（2﹣2*a*）+1＝0的△＝4*a*2﹣8*a*＞0，

∴*x*2+（2﹣2*a*）+1＝0有两个不等的根，设两根分别为*x*1，*x*2，且*x*1＜*x*2，

∵*x*1+*x*2＝2*a*﹣2，*x*1•*x*2＝1，

∴0＜*x*1＜1＜*x*2，＜0，*f*′（*x*）＜0，*f*（*x*）单调递减，

当*x*∈（1，*x*2）时，*x*2+（2﹣2*a*）+1＜0，*f*′（*x*）＜0，*f*（*x*）单调递减，

*f*（*x*）＜*f*（1）＝0，不符合题意，

综上可得，*a*的范围（﹣∞，2]．

6．已知函数*f*（*x*）*ax*+*a*，*a*∈*R*．

（Ⅰ）当*a*＝1时，求曲线*y*＝*f*（*x*）在点（0，1）处的切线方程；

（Ⅱ）求函数*y*＝*f*（*x*）的单调区间；

（Ⅲ）当*x*∈（0，2）时，比较*f*（*x*）与的大小．

【答案】（Ⅰ）；（Ⅱ）答案见解析；（Ⅲ）.

【解析】解：（Ⅰ）当时，，

因为，所以，

所以曲线在点（0，1）处的切线方程为，即．

（II）定义域为R．

因为，

①当*a*＝0时，恒成立，所以函数在R上单调递增，

②当*a*＜0时，恒成立，所以函数在R上单调递增．

③当*a*＞0时，令，则或，

所以当时，或，

当时，，

所以函数在和上单调递增，在上单调递减，

综上可知，当时，函数在R上单调递增；当*a*＞0时，函数在和上单调递增，在上单调递减．

（III）由（Ⅱ）可知，

（1）当时，函数在R上单调递增，

所以当时，，

因为，所以，

（2）当*a*＞0时，函数在和上单调递增，在上单调递减．

①当，即时，．

所以当时，函数在上单调递减，上单调递增，

，所以．

②当，即1＜*a*＜4时，．

由上可知，，

因为，

设．

因为，所以在上单调递增．

所以．

所以

所以，

③当，即时，．

因为函数在上单调递减，

所以当时，．

所以．

综上可知，时，.

7.已知函数f（x）=x2lnx．

（1）求函数f（x）的单调区间；

（2）证明：对任意的t＞0，存在唯一的s，使t=f（s）．

（3）设（2）中所确定的s关于t的函数为s=g（t），证明：当t＞e2时，有．

【答案】（1）所以函数f（x）的单调递减区间为（0，），单调递增区间为（，+∞）

（2）见解析 （3）见解析

【解析】（1）由题意可知函数的定义域为（0，+∞），

求导数可得f′（x）=2xlnx+x2•=2xlnx+x=x（2lnx+1），

令f′（x）=0，可解得x=，

当x变化时，f′（x），f（x）的变化情况如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | （0，） |  | （，+∞） |
| f′（x） | ﹣ | 0 | + |
| f（x） | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 |

所以函数f（x）的单调递减区间为（0，），单调递增区间为（，+∞）

（2）证明：当0＜x≤1时，f（x）≤0，设t＞0，令h（x）=f（x）﹣t，x∈[1，+∞），

由（1）可知，h（x）在区间（1，+∞）单调递增，h（1）=﹣t＜0，h（et）=e2tlnet﹣t=t（e2t﹣1）＞0，

故存在唯一的s∈（1，+∞），使得t=f（s）成立；

（3）证明：因为s=g（t），由（2）知，t=f（s），且s＞1，

从而====，其中u=lns，

要使成立，只需，

即2＜，即2＜2+，

只需，变形可得只需0＜lnu＜，

当t＞e2时，若s=g（t）≤e，则由f（s）的单调性，有t=f（s）≤f（e）=e2，矛盾，

所以s＞e，即u＞1，从而lnu＞0成立，

另一方面，令F（u）=lnu﹣，u＞1，F′（u）=，

令F′（u）=0，可解得u=2，

当1＜u＜2时，F′（u）＞0，当u＞2时，F′（u）＜0，

故函数F（u）在u=2处取到极大值，也是最大值F（2）=ln2﹣1＜0，

故有F（u）=lnu﹣＜0，即lnu＜，

综上可证：当t＞e2时，有成立．

8．已知函数f（x）=ln（x+1）+ax，其中a∈R．

（Ⅰ） 当a=﹣1时，求证：f（x）≤0；

（Ⅱ） 对任意x2≥ex1＞0，存在x∈（﹣1，+∞），使  成立，求a的取值范围．（其中e是自然对数的底数，e=2.71828…）

【答案】（1）见解析（2）

【解析】解：（Ⅰ）证明：当 a=﹣1时，f（x）=ln（x+1）﹣x（x＞﹣1），

则  ，令f'（x）=0，得x=0．

当﹣1＜x＜0时，f'（x）＞0，f（x）单调递增；

当x＞0时，f'（x）＜0，f（x）单调递减．

故当x=0时，函数f（x）取得极大值，也为最大值，

所以f（x）max=f（0）=0，

所以，f（x）≤0，得证．

（Ⅱ）不等式  ，

即为  ．

而 

=  ．

令  ．故对任意t≥e，存在x∈（﹣1，+∞），使  恒成立，

所以  ，

设  ，则  ，

设u（t）=t﹣1﹣lnt，知  对于t≥e恒成立，

则u（t）=t﹣1﹣lnt为[e，+∞）上的增函数，

于是u（t）=t﹣1﹣lnt≥u（e）=e﹣2＞0，

即  对于t≥e恒成立，

所以  为[e，+∞）上的增函数，

所以  ；

设p（x）=﹣f（x）﹣a，即p（x）=﹣ln（x+1）﹣ax﹣a，

当a≥0时，p（x）为（0，+∞）上的减函数，

且其值域为R，可知符合题意．

当a＜0时，  ，由p'（x）=0可得  ，

由p'（x）＞0得  ，则p（x）在  上为增函数，

由p'（x）＜0得  ，则p（x）在  上为减函数，

所以  ．

从而由  ，解得  ，

综上所述，a的取值范围是 