2021届高三（新高考）数学大题优练 导数之隐零点问题

**优选例题**

例1．已知函数．

（1）若函数，讨论在的单调性；

（2）若，对任意恒成立，求整数*k*的最大值．

【答案】（1）在区间上单调递减，在区间上单调递增；（2）．

【解析】（1）因为，

令，则．

所以函数在单调递增，从而，所以．

由，得；由，得，

所以在区间上单调递减，在区间上单调递增．

（2）因为，对任意恒成立，

所以．

令，则，所以在**R**上单调递增，

又，，

所以存在唯一的，使得，

又，

由（1）知当时，，所以，

所以存在唯一的，使得，即．

当时，，所以单调递减；

当时，，所以单调递增，

所以，

，，

又，所以*k*的最大值为．

**模拟优练**

1．已知函数．

（1）讨论函数的单调性；

（2）证明：不等式恒成立．

2．已知函数．

（1）求的最值；

（2）若对恒成立，求的取值范围．

3．已知函数，．

（1）求函数的极值；

（2）当时，证明：．

4．设函数．

（1）当时，求函数的单调区间；

（2）当时，求证：．

5．已知函数，．

（1）若是函数的极值点，求*a*的值；

（2）当时，证明：．

**参考答案**

1．【答案】（1）答案见解析；（2）证明见解析．

【解析】（1），

当时，，所以在上单调递增；

当时，令，得到，

所以当时，，单调递增；

当，，单调递减，

综上所述，当时，在上单调递增；

当时，在上单调递增，在上单调递减．

（2）设函数，则，

可知在上单调递增．

又由，，知在上有唯一实数根，且，

则，即．

当时，，单调递减；

当时，，单调递增，

所以，结合，知，

所以，

则，即不等式恒成立．

2．【答案】（1）最小值为，无最大值；（2）．

【解析】（1），

令，得；令，得，

所以在上单调递减，在上单调递增，

所以的最小值为，无最大值．

（2）由题知，在上恒成立，

令，则，

因为，所以．

设，易知在上单调递增．

因为，，

所以存在，使得，即．

当时，，在上单调递减；

当时，，在上单调递增，

所以，从而，

故的取值范围为．

3．【答案】（1）答案见解析；（2）证明见解析．

【解析】（1）∵，，∴，

当时，恒成立，函数单调递减，函数无极值；

当时，时，，函数单调递减；

时，，函数单调递增，

故函数的极小值为，无极大值．

（2）证明：令，

，

故，

令的根为，即，

两边求对数得，即，

∴当时，，单调递增；

当时，，单调递减，

∴，

∴，即原不等式成立．

4．【答案】（1）当时，单调递增，当时，单调递减；（2）证明见解析．

【解析】（1）时，令，可化为，即，，

易知为增函数，且，

所以当时，，单调递减；

当时，，单调递增，

又，所以当时，，单调递增；

当时，，单调递减．

（2）令，可化为，，

当时，易知为上增函数，

当时，；当时，；当时，，

而，

所以存在，，即，

当时，单调递减；

当时，单调递增，

所以．

5．【答案】（1）；（2）证明见解析．

【解析】（1），

由题意知，

又设，

显然当时，，因此函数是增函数，

而，

所以当时，，单调递减；

当时，，单调递增，

故是函数的极小值点，故符合题意．

（2）当时，对于时，有，即，

故要证明，只需证明，

令，即只需证明，则有，

设，

则显然当时，，因此函数是增函数，

，，

故存在，使得，即，

因此当时，，单调递减；

当时，，单调递增，

所以有，

又，∴，

设，则，

，，单调递减，

因此有，

故，故，原不等式得证．