1. **基本不等式**

**知识回顾**

1．基本不等式：≤

(1)基本不等式成立的条件：*a*≥0，*b*≥0.

(2)等号成立的条件：当且仅当*a*＝*b*时取等号．

2．几个重要的不等式

(1)*a*2＋*b*2≥2*ab*(*a*，*b*∈**R**)．

(2)＋≥2(*a*，*b*同号)．

(3)*ab*≤2 (*a*，*b*∈**R**)．

(4)≥2 (*a*，*b*∈**R**)．

以上不等式等号成立的条件均为*a*＝*b*.

3．算术平均数与几何平均数

设*a*>0，*b*>0，则*a*，*b*的算术平均数为，几何平均数为，基本不等式可叙述为两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数．

4．利用基本不等式求最值问题

已知*x*>0，*y*>0，则

(1)如果积*xy*是定值*p*，那么当且仅当*x*＝*y*时，*x*＋*y*有最小值2.(简记：积定和最小)

(2)如果和*x*＋*y*是定值*p*，那么当且仅当*x*＝*y*时，*xy*有最大值.(简记：和定积最大)

**课前检测**

1．设*a*、*b*为正数，且*a*＋*b*≤4，则下列各式中正确的一个是(　　)

A.＋<1 B.＋≥1 C.＋<2 D.＋≥2

解析：∵*ab*≤2≤2＝4，∴＋≥2≥2＝1.答案：B

2．设*a*，*b*，*c*，*d*，*m*，*n*均为正实数，*p*＝＋，*q*＝·，则(　　)

A．*p*≤*q* B．*p*≥*q* C．*p*<*q* D．*p*>*q*

解析：*p*2＝*ab*＋*cd*＋2，*q*2＝(*ma*＋*nc*)·＝*ab*＋*cd*＋＋.

∵*a*，*b*，*c*，*d*，*m*，*n*均为正实数，∴＋≥2，∴*q*2≥*p*2从而*p*≤*q*.答案：A

3．已知不等式(*x*＋*y*)≥9对任意正实数*x*，*y*恒成立，则正实数*a*的最小值为(　　)

A．8 B．6 C．4 D．2

解析：只需求(*x*＋*y*)＝1＋*a*·＋＋*a*≥*a*＋1＋2＝*a*＋2＋1，等号成立当且仅当*a*·＝即可，所以()2＋2＋1≥9，即()2＋2－8≥0，求得≥2或≤－4(舍)，所以*a*≥4，即*a*的最小值为4. 答案：C

4．已知0<*x*<，则函数*y*＝*x*(1－3*x*)的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：∵0<*x*<，∴1－3*x*>0，∴*y*＝*x*(1－3*x*)＝·3*x*(1－3*x*)≤2＝，

当且仅当3*x*＝1－3*x*，即*x*＝时等号成立．∴当*x*＝时，函数取最大值. 答案：

5．(1)已知a>0，b>0，a＋b＝2，则y＝＋的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

(2)已知0<x<1，则y＝*lg*x＋的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

(3)已知lg *a*＋lg *b*＝2，求*a*＋*b*的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

(4)已知*x*＞0，*y*＞0，且2*x*＋3*y*＝6，求*xy*的最大值\_\_\_\_\_\_\_\_．

(5)已知*x*＞0，*y*＞0，＋＝1，求*x*＋*y*的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

解： (1)∵a＋b＝2，∴＝1，∴＋＝＝＋≥＋2＝

(当且仅当＝，即b＝2a时，等号成立)．故y＝＋的最小值为.

(2)∵0<x<1，∴*lg*x<0，－*lg*x>0，∴－y＝－*lg*x＋≥2＝4，

当且仅当－*lg*x＝，即x＝时，等号成立，故y*max*＝－4.

(3)由lg *a*＋lg *b*＝2可得lg *ab*＝2，即*ab*＝100，且*a*＞0，*b*＞0，因此由基本不等式可得*a*＋*b*≥2 ＝2 ＝20，当且仅当*a*＝*b*＝10时，*a*＋*b*取到最小值20.

(4)∵*x*＞0，*y*＞0,2*x*＋3*y*＝6，∴*xy*＝(2*x*·3*y*)≤·2＝·2＝，

当且仅当2*x*＝3*y*，即*x*＝，*y*＝1时，*xy*取到最大值.

(5)∵＋＝1，∴*x*＋*y*＝(*x*＋*y*)×＝1＋＋＋9＝＋＋10，又∵*x*＞0，*y*＞0，

∴＋＋10≥2＋10＝16，当且仅当＝，即*y*＝3*x*时，等号成立．

**考点一．利用基本不等式求最值**

**1.凑系数（乘、除变量系数）.**

例1　已知0<*x*<1，则*x*(4－3*x*)取得最大值时*x*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案

解析　*x*(4－3*x*)＝·(3*x*)(4－3*x*)

≤·2＝，

当且仅当3*x*＝4－3*x*，即*x*＝时，取等号．

变式1.已知：，求函数的最大值

解析：∵为定值，且，则，可用均值不等式法

∵，∴，，

当且仅当，即时，．

变式2.设实数x,y满足3≤≤8，4≤≤9，则的最大值是.

 [解析] 考查不等式的基本性质，等价转化思想。

，，，的最大值是27。

**2.凑项（加、减常数项）.**

例2. 已知，求函数的最大值.

【答案】1

变式3.已知函数*f* (*x*)＝(*x*<－1)，则(　　)

A．*f* (*x*)有最小值4 B．*f* (*x*)有最小值－4

C．*f* (*x*)有最大值4 D．*f* (*x*)有最大值－4

答案　A

解析　*f* (*x*)＝＝

＝－＝－

＝－(*x*＋1)＋＋2.

因为*x*<－1，所以*x*＋1<0，－(*x*＋1)>0，

所以*f* (*x*)≥2＋2＝4，

当且仅当－(*x*＋1)＝，即*x*＝－2时，等号成立．

故*f* (*x*)有最小值4.

变式4. （1）已知*x*>2，求*x*＋的最小值；

∵*x*>2，∴*x*－2>0，∴*x*＋＝*x*－2＋＋2≥2 ＋2＝6，

当且仅当*x*－2＝，即*x*＝4时，等号成立．所以*x*＋的最小值为6.

（2）．函数*y*＝log2 (*x*>1)的最小值为\_\_\_\_\_\_．

解：∵*x*＋＋5＝(*x*－1)＋＋6≥2 ＋6＝8.: ∴log2≥3，∴*y*min＝3.

1. **调整分子**

例3**.（1）**（2020届山东省枣庄市高二上学期统考）函数的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

（答案）

（解析）由于，故，故，当且仅当，即时，函数取得最小值为.

（2）已知*t*>0，则函数*y*＝的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析： *y*＝*t*＋－4≥－4＝－2，等号成立时*t*＝1，即函数*y*＝(*t*>0)的最小值是－2.

**变式5．**已知*x*≥，则*f*(*x*)＝有(　　)

A．最大值 B．最小值 C．最大值1 D．最小值1

解析：由已知*f*(*x*)＝＝＝，∵*x*≥，*x*－2>0，

∴≥·2＝1，当且仅当*x*－2＝，即*x*＝3时取等号．

故*f*(*x*)的最小值为1，选D.

**4.“1”的代换（逆用条件）**

例4.已知*x*>0，*y*>0，且＋＝1，求*x*＋*y*的最小值

解析：法一：(“1”的代换)∵＋＝1，∴*x*＋*y*＝(*x*＋*y*)＝10＋＋.∵*x*>0，*y*>0，∴＋≥2＝6.当且仅当＝，即*y*＝3*x*，取“＝”．又∵＋＝1，∴*x*＝4，*y*＝12.∴当*x*＝4，*y*＝12时，(*x*＋*y*)min＝16.

**变式6．**已知*x*>0，*y*>0，且*x*＋2*y*＝1，求＋的最小值．

解析：∵*x*＋2*y*＝1，且*x*>0，*y*>0，∴＋＝(*x*＋2*y*)＝1＋2＋＋≥3＋2，

当且仅当＝，即*x*2＝2*y*2时取“＝”．解得

即*x*＝－1，*y*＝1－时，＋取最小值3＋2.

**变式7.**（2020·山东省聊城二中高一月考）已知，则的值可能是（ ）

A． B． C． D．

（答案）CD

（解析）由，得，则且.

当时, =

=.

当且仅当即 时取等号.

当时, =

=.

当且仅当即 时取等号.

综上，.故选：C D.

**变式8.**（2020届山东师范大学附中高二月考）若，，，则的最小值为（ ）

A．9 B．8 C．7 D．6

（答案）A

（解析）∵，∴，∴，

，当且仅当“”时取等号，

∴的最小值为9.

故选：A.

**5.消元法**

例5．（1）若正数*x*，*y*满足*x*2＋6*xy*－1＝0，则*x*＋2*y*的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：因为正数*x*，*y*满足*x*2＋6*xy*－1＝0，

所以*y*＝.

由即解得0＜*x*＜1.

所以*x*＋2*y*＝*x*＋＝＋≥2 ＝，

当且仅当＝，即*x*＝，*y*＝时取等号．

故*x*＋2*y*的最小值为.

答案：

（2）　已知*x*>0，*y*>0，*x*＋3*y*＋*xy*＝9，则*x*＋3*y*的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　6

解析　方法一　(换元消元法)

由已知得*x*＋3*y*＝9－*xy*，

因为*x*>0，*y*>0，

所以*x*＋3*y*≥2，

所以3*xy*≤2，

当且仅当*x*＝3*y*，即*x*＝3，*y*＝1时取等号，

即(*x*＋3*y*)2＋12(*x*＋3*y*)－108≥0，

令*x*＋3*y*＝*t*，则*t*>0且*t*2＋12*t*－108≥0，

得*t*≥6，即*x*＋3*y*的最小值为6.

方法二　(代入消元法)

由*x*＋3*y*＋*xy*＝9，得*x*＝，

所以*x*＋3*y*＝＋3*y*＝

＝＝

＝3(1＋*y*)＋－6≥2－6

＝12－6＝6，

当且仅当3(1＋*y*)＝，即*y*＝1，*x*＝3时取等号，

所以*x*＋3*y*的最小值为6.

变式9.(2020·天津模拟)已知*a*>0，*b*>0，*c*>0，若点*P*(*a*，*b*)在直线*x*＋*y*＋*c*＝2上，则＋的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　2＋2

解析　∵*P*(*a*，*b*)在*x*＋*y*＋*c*＝2上，

∴*a*＋*b*＋*c*＝2，*a*＋*b*＝2－*c*>0，

＋＝＋＝＋－1，

设则*m*＋*n*＝2，

＋＝＋＝×

＝3＋＋≥3＋2＝3＋2，

当且仅当*m*2＝2*n*2，即*c*＝2－2时，等号成立，

∴＋－1≥3＋2－1＝2＋2，

即＋的最小值为2＋2.

变式10.已知为正实数，且，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

**考点二．利用基本不等式证明不等式**

例1.已知*a*，*b*，*c*都是实数．求证：*a*2＋*b*2＋*c*2≥(*a*＋*b*＋*c*)2≥*ab*＋*bc*＋*ac*.

分析：运用基本不等式可得出*a*2＋*b*2≥2*ab*，*b*2＋*c*2≥2*bc*，*a*2＋*c*2≥2*ac*，然后再利用不等式的性质即可得证．

证明：∵*a*，*b*，*c*∈**R**，∴*a*2＋*b*2≥2*ab*，*b*2＋*c*2≥2*bc*，*a*2＋*c*2≥2*ac*.

∴2(*a*2＋*b*2＋*c*2)≥2(*ab*＋*bc*＋*ac*)，　① 即*a*2＋*b*2＋*c*2≥*ab*＋*bc*＋*ac*.　②

在不等式①两边同时加上*a*2＋*b*2＋*c*2，得3(*a*2＋*b*2＋*c*2)≥(*a*＋*b*＋*c*)2，∴*a*2＋*b*2＋*c*2≥(*a*＋*b*＋*c*)2.　③

在不等式②两边同时加上2*ab*＋2*bc*＋2*ac*，得(*a*＋*b*＋*c*)2≥3(*ab*＋*bc*＋*ac*)，

∴(*a*＋*b*＋*c*)2≥*ab*＋*bc*＋*ac*.　④

由③④，得*a*2＋*b*2＋*c*2≥(*a*＋*b*＋*c*)2≥*ab*＋*bc*＋*ac*.

**变式1．**若*a*，*b*∈**R**，且*ab*>0，则下列不等式中，恒成立的是(　　)

A．*a*2＋*b*2>2*ab* B．*a*＋*b*≥2 C.＋> D.＋≥2

解析：当*a*＝*b*时，*a*2＋*b*2＝2*ab*，故A不正确；当*a*<0，*b*<0时，*a*＋*b*<2，故B不正确；C也不正确；只有D正确．

变式2**．**已知*a*、*b*、*c*为正数，*a*＋*b*＋*c*＝1，且不全相等，求证：＋＋>9.

解析：∵*a*，*b*，*c*为正数，∴＋＋＝(*a*＋*b*＋*c*)＝＋＋

＝3＋＋＋＋＋＋＝3＋＋＋≥3＋2＋2＋2＝9，

∵*a*，*b*，*c*不全相等，∴“＝”不成立． 即＋＋>9.

变式3**．**若、，，求证：．

证明：因为、，所以，

又，所以，所以，即．

**变式4．**下列不等式一定成立的是(　　)

A．lg>lg*x*(*x*>0) B．sin*x*＋≥2(*x*≠*k*π，*k*∈**Z**) C．*x*2＋1≥2|*x*|(*x*∈**R**) D.>1(*x*∈**R**)

解析：取*x*＝，则lg＝lg*x*，故排除A；取*x*＝π，则sin*x*＝－1，故排除B；取*x*＝0，则＝1，故排除D.应选C.

**考点三.基本不等式的综合应用**

例1（2020届山东省滨州市三校高三上学期联考）已知，，若不等式恒成立，则*m*的最大值为（ ）

A．10 B．12 C．16 D．9

（答案）D

（解析）由已知，，若不等式恒成立，

所以恒成立，

转化成求的最小值，
，所以．
故选：D．

变式1**.**（2020·济南市历城第二中学高一期末）已知正数，满足，则的最小值是（ ）

A．2 B．3 C．4 D．5

（答案）A

（解析）设，则

（当且仅当，即时取等号）

且，解得：，即

的最小值为，故选：

变式2.（河南省新乡市高二年级上学期期末考试）已知，则的最小值为（ ）

A. 3 B. 2 C. 4 D. 1

（答案）A

（解析）

，当 时等号成立，即的最小值为，故选A.

变式3**.**（河南省林州市第一中学高二上学期期末考试）已知， ， ，则的最小值为（ ）

A.  B.  C.  D. 

（答案）B

（解析）  ,选B

变式4.（浙江省亳州市2017-2018学年度第一学期期末高二质量检测）已知，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

（答案）

（解析） 

 ，当且仅当时取等号

变式5.（2020·上海华师大二附中高一期末），则的最大值

为\_\_\_\_\_\_\_\_.

（答案）

（解析）由题意，则，

当且仅当，即时等号成立，

即的最大值为.故答案为

**考点四.利用基本不等式解决实际问题**

**例1．**（2020届山东师范大学附中高三月考）已知某工厂每天固定成本是4万元，每生产一件产品成本增加100元，工厂每件产品的出厂价定为元时，生产件产品的销售收入是（元），为每天生产件产品的平均利润（平均利润＝总利润/总产量）.销售商从工厂每件元进货后又以每件元销售，（1）每天生产量为多少时，平均利润取得最大值？并求的最大值；

（解析）（1）依题意总利润＝，

＝，

,

 此时,,

即，每天生产量为400件时，平均利润最大，最大值为200元 .

变式1.（2020·济南市历城第二中学高一期末）有一批材料,可以建成长为240米的围墙.如图,如果用材料在一面靠墙的地方围成一块矩形的场地,中间用同样材料隔成三个相等面积的矩形,怎样围法才可取得最大的面积?并求此面积.



（答案）当面积相等的小矩形的长为时，矩形面积最大，

（解析）设每个小矩形的长为，宽为，依题意可知，



，

当且仅当取等号，

所以时，.

变式2．（2020届山东省潍坊市高三上期中）在经济学中，函数的边际函数定义为．某医疗设备公司生产某医疗器材，已知每月生产台的收益函数为 （单位：万元），成本函数（单位：万元），该公司每月最多生产台该医疗器材．（利润函数=收益函数－成本函数）

（1）求利润函数及边际利润函数；

（2）此公司每月生产多少台该医疗器材时每台的平均利润最大，最大值为多少?（精确到）

（3）求为何值时利润函数取得最大值，并解释边际利润函数的实际意义．

（答案）（1）；；（2）台，万元；（3）或；反映了产量与利润增量的关系，从第二台开始，每多生产一台医疗器材利润增量在减少.

（解析）

（1）由题意知：且，

，



.

（2）每台医疗器材的平均利润，当且仅当时等号成立.

因为，当每月生产台机器时，每台平均约为万元，每月生产台时，每台平均约为万元，故每月生产台时，每台医疗器材的平均利润最大为万元.

（3），

由，得，此时随增大而增大，

由得，此时随增大而减小，

或时，取得最大值.

反映了产量与利润增量的关系，从第二台开始，每多生产一台医疗器材利润增量在减少.

**课后习题**

一．单选

1．已知*f*(*x*)＝*x*＋－2(*x*＜0)，则*f*(*x*)有(　　)

A．最大值为0　　B．最小值为0 C．最大值为－4 D．最小值为－4

解析：选C，∵*x*＜0，∴*f*(*x*)＝－－2≤－2－2＝－4，当且仅当－*x*＝，即*x*＝－1时取等号．

2．若*a*＞*b*＞0，则下列不等式成立的是(　　)

A．*a*＞*b*＞＞ B．*a*＞＞＞*b* C．*a*＞＞*b*＞ D．*a*＞＞＞*b*

解析：选B　*a*＝＞＞＞＝*b*，因此只有B项正确．

3．若*a*>0，*b*>0，且ln(*a*＋*b*)＝0，则＋的最小值是(　　)

A. B．1 C．4 D．8

解析：由*a*>0，*b*>0，ln(*a*＋*b*)＝0，得∴＋＝＋＝2＋＋≥2＋2＝4，当且仅当*a*＝*b*＝时，取等号． 答案：C

4．已知*x*＋3*y*－2＝0，则3*x*＋27*y*＋1的最小值是(　　)

A．3 B．1＋2 C．6 D．7

解析：∵3*x*＋27*y*＋1＝3*x*＋33*y*＋1≥2＋1＝2×3＋1＝7，当且仅当3*x*＝33*y*且*x*＋3*y*－2＝0，即*x*＝1，*y*＝时，等号成立，∴所求最小值为7.答案：D

5．已知x＞0，y＞0，且＋＝1，若x＋2y＞m2＋2m恒成立，则实数m的取值范围是(　　)

*A*．(－∞，－2]∪[4，＋∞) *B*．(－∞，－4]∪[2，＋∞)

*C*．(－2，4) *D*．(－4，2)

解析：∵*x*＞0，*y*＞0，∴*x*＋2*y*＝(*x*＋2*y*)＝＋＋4≥2＋4＝4＋4＝8，当且仅当*x*＝4，*y*＝2时，等号成立．∵*x*＋2*y*＞*m*2＋2*m*恒成立，∴*m*2＋2*m*＜8，解得－4＜*m*＜2，故选D.

6．已知*x*>0，*y*>0，*x*＋2*y*＋2*xy*＝8，则*x*＋2*y*的最小值是(　　)

A．3 B．4 C. D.

解析：∵*x*＋2*y*＋2*xy*＝8，∴*y*＝>0，∴－1<*x*<8，∴*x*＋2*y*＝*x*＋2·＝(*x*＋1)＋－2≥2－2＝4，当且仅当*x*＋1＝时“＝”成立，此时*x*＝2，*y*＝1. 答案：B

7．若*x*>0，*y*>0，且＋＝1，则*xy*有(　　)

A．最大值64 B．最小值 C．最小值 D．最小值64

解析：*xy*＝*xy*＝2*y*＋8*x*≥2＝8，∴≥8，即*xy*≥64，当且仅当

即时等号成立．答案：D

8．已知函数f(x)＝x＋(p为常数，且p>0)，若f(x)在(1，＋∞)上的最小值为4，则实数p的值为(　　)

*A*．2 *B*. *C*．4 *D*.

解析：当x∈(1，＋∞)时，x－1>0，则f(x)＝x－1＋＋1≥ 2＋1，当且仅当x＝＋1时取等号，因为f(x)在(1，＋∞)上的最小值为4，所以2＋1＝4，解得p＝，故选*B*.

9．设*a*、*b*是实数，且*a*＋*b*＝3，则2*a*＋2*b*的最小值是(　　)

A．6 B．4 C．2 D．8

解析：选B　∵*a*，*b*是实数，∴2*a*＞0,2*b*＞0，于是2*a*＋2*b*≥2 ＝2＝2 ＝4，当且仅当*a*＝*b*＝时取得最小值4.

10．若不等式*x*2＋*ax*＋1≥0对一切*x*∈成立，则*a*的最小值为(　　)

A．0 B．－2 C．－ D．－3

解析：∵不等式*x*2＋*ax*＋1≥0对一切*x*∈成立，∴对一切*x*∈，*ax*≥－*x*2－1，即*a*≥－成立．令*g*(*x*)＝－＝－. 易知*g*(*x*)＝－在内为增函数．

∴当*x*＝时，*g*(*x*)max＝－. ∴*a*的取值范围是*a*≥－，即*a*的最小值是－. 故选C.

二．多选题

11．若，，则（ ）

A． B． C．  D． 

【答案】ACD

【解析】由，，得，，则

，

，





，

故正确的有：

故选：.

12．有以下四个结论：①；②；③若，则；④．其中正确的是（ ）

A．① B．②

C．③ D．④

【答案】AB

【解析】因为 ，，，所以①②均正确；③中若，则 ，故③错误；④中，而没有意义，故④错误.

故选AB.

13．已知正实数满足，，则的值可以为（ ）

A．2 B．4 C．5 D．6

**【答案】**BC

【解析】由指对互化关系得，即，

所以，得或．

时，，；时，，．故选BC．

14．设都是正数，且，那么（ ）

A． B． C． D．

【答案】AD

【解析】由题意,设,则,,,

对于选项A,由,可得,因为,故A正确,B错误；

对于选项C,,,故,即C错误；

对于选项D,,,故,即D正确；

故选AD.

三．填空题

15．设*x*，*y*为正数，则(*x*＋*y*)的最小值为

解析：选B　*x*，*y*为正数，(*x*＋*y*)＝1＋4＋＋≥9，当且仅当*y*＝2*x*等号成立，答案：9.

**16**．已知*x*、*y*都是正数，

(1)如果*xy*＝15，则*x*＋*y*的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_；(2)如果*x*＋*y*＝15，则*xy*的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：(1)*x*＋*y*≥2 ＝2 ，即*x*＋*y*的最小值是2 ；当且仅当*x*＝*y*＝时取最小值．

(2)*xy*≤2＝2＝，即*xy*的最大值是. 当且仅当*x*＝*y*＝时*xy*取最大值．

答案：(1)2　(2)

17．若对任意*x*>0，≤*a*恒成立，则*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

解析：因为*x*>0，所以*x*＋≥2，当且仅当*x*＝1时取等号，所以有＝≤＝

即的最大值为，故*a*≥.

18．设*a*＞0，*b*＞0，给出下列不等式：①*a*2＋1＞*a*；②≥4；③(*a*＋*b*)≥4；

④*a*2＋9＞6*a*，其中恒成立的是\_\_\_\_\_\_\_\_(填序号)．

解析：由于*a*2＋1－*a*＝2＋＞0，故①恒成立；由于*a*＋≥2，*b*＋≥2.∴≥4，故②恒成立；由于*a*＋*b*≥2，＋≥2 ，故(*a*＋*b*)·≥4，故③恒成立，当*a*＝3时，*a*2＋9＝6*a*，故④不能恒成立． 答案：①②③

四．解答题

19．(1)已知0＜*x*＜，求*y*＝*x*(1－2*x*)的最大值．

(2)已知*x*＜3，求*f*(*x*)＝＋*x*的最大值．

(3)已知*x*，*y*∈**R**＋，且*x*＋*y*＝4，求＋的最小值；

解：(1)∵0＜*x*＜，∴1－2*x*＞0，*y*＝·2*x*·(1－2*x*)≤·2＝×＝.

∴当且仅当2*x*＝1－2*x*，即*x*＝时，*y*最大值＝.

(2)∵*x*＜3，∴*x*－3＜0，∴*f*(*x*)＝＋*x*＝＋(*x*－3)＋3＝－＋3≤－2＋3＝－1，当且仅当＝3－*x*，即*x*＝1时取等号，∴*f*(*x*)的最大值为－1.

(3)法一：∵*x*，*y*∈**R**＋，∴(*x*＋*y*)(＋)＝4＋(＋)≥4＋2.

当且仅当＝，即*x*＝2(－1)，*y*＝2(3－)时取“＝”号．

又*x*＋*y*＝4，∴＋≥1＋，故＋的最小值为1＋.

法二：∵*x*，*y*∈**R**＋，且*x*＋*y*＝4，∴＋＝＋＝1＋(＋)≥1＋2＝1＋.当且仅当＝，即*x*＝2(－1)，*y*＝2(3－)时取“＝”号． ∴＋的最小值为1＋.

20. 如右图，公园想建一块面积为144平方米的矩形草地，一边靠墙，另外三边用铁丝网围住，现有44米铁丝网可供使用(铁丝网可以剩余)，若利用*x*米墙，

(1)求*x*的取值范围；(2)求最少需要多少米铁丝网(精确到0.1米)．

解：(1)由于矩形草地的面积是144平方米，一边长是*x*米，则另一边长为米，

则矩形草地所需铁丝网长度为*y*＝*x*＋2×.

令*y*＝*x*＋2×≤44(*x*＞0)，解得8≤*x*≤36，则*x*的取值范围是[8,36]．

(2)由基本不等式，得*y*＝*x*＋≥24，当且仅当*x*＝，即*x*≈17.0时，等号成立，则*y*最小值＝24≈34.0，即最少需要约34.0米铁丝网．

21．已知*a*>0，*b*>0，*a*＋*b*＝1，求证：≥9.

证明：方法一：因为*a*>0，*b*>0，*a*＋*b*＝1，所以1＋＝1＋＝2＋.同理1＋＝2＋，

故＝＝5＋2≥5＋4＝9，所以≥9

方法二：＝1＋＋＋＝1＋＋＝1＋，因为*a*，*b*为正数，*a*＋*b*＝1，

所以*ab*≤2＝，于是≥4，≥8，因此≥1＋8＝9

22．已知函数*y*＝(*x*>－2)．

(1)求的取值范围．(2)当*x*为何值时，*y*取何最大值？

解：(1)设*x*＋2＝*t*，*x*＝*t*－2，*t*>0(*x*>－2)，

则＝＝＝＝*t*＋－3≥2－3，∴的取值范围为[2－3，＋∞]．

(2)欲使*y*最大，必有最小，此时*t*＝，*t*＝，*x*＝－2，*y*＝，∴当*x*＝－2时，*y*最大，最大值为.